Как у нас изменится ситуация со стационарным уравнением Шрёдингера в трёхмерии?

Оператор кин.энергии $\frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m}$ будет содержать уже не одну вторую производную, а три:

$$\frac{1}{2m}\left(-h\frac{\partial^2}{\partial x^2}-h\frac{\partial^2}{\partial y^2}-h\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)=-\frac{h^2}{2m}\Delta$$

И тогда стационарное ур-е Шрёдингера превратится в

$$-\frac{h^2}{2m}\Delta\Psi(x,y,z)+U(x,y,z)\Psi(x,y,z)=E\Psi(x,y,z)$$

Это сложное диф.уравнение в частных производных (ДУ в ЧП). Если у вас уже есть/было ММФ, то вы знаете, что любое ДУ в ЧП сложнее любого обыкновенного ДУ (а если ММФ не было – мотайте на ус ☺)

К счастью, в 4-м и 5-м семестрах мы будем рассматривать самый простой случай:

$$U(x,y,z)=U_1(x)+U_2(y)+U_3(z)$$

В этом случае всё факторизуется:

$$\hat{H}=\frac{\widehat{p_x}^2}{2m}+U_1(x)+\frac{\widehat{p_y}^2}{2m}+U_2(y)+\frac{\widehat{p_z}^2}{2m}+U_3(z)$$

ВФ нужно искать в виде

$$\Psi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$$

И для каждой координаты своя одномерная задача:

$$\frac{\widehat{p_x}^2\Psi(x)}{2m}+U_1(x)\Psi(x)=E_1\Psi(x)$$

$$\frac{\widehat{p_y}^2\Psi(y)}{2m}+U_2(y)\Psi(y)=E_2\Psi(y)$$

$$\frac{\widehat{p_z}^2\Psi(z)}{2m}+U_3(z)\Psi(z)=E_3\Psi(z)$$

Пример задачи, которую тут дают семинаристы (мне вот давали!) в 4-м семестре: трёхмерный гармонический осциллятор:

$$\hat{H}=\frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m}+\frac{k}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

В этом случае решение записывается как

$$\Psi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$$

Где все три функции – СФ одномерного гармонического осциллятора.

А что с энергией? Т.к. гамильтониан представляет собой сумму трёх гамильтонианов:

То каждый из них даёт по $\frac{h\omega}{2}$. Тогда у трёхмерного гармонического осциллятора основное состояние будет уже иметь энергию $\frac{h\omega}{2}+\frac{h\omega}{2}+\frac{h\omega}{2}=3\frac{h\omega}{2}$.

А какие будут возбуждённые? Да те же: $5\frac{h\omega}{2}, 7\frac{h\omega}{2}$ ... Вот только получаться они уже будут разными способами. Например, состояние $5\frac{h\omega}{2}$ может получиться тремя разными способами:

$$\frac{3h\omega}{2}+\frac{h\omega}{2}+\frac{h\omega}{2}$$
$$\frac{h\omega}{2}+\frac{3h\omega}{2}+\frac{h\omega}{2}$$
$$\frac{h\omega}{2}+\frac{h\omega}{2}+\frac{3h\omega}{2}$$

Говорят, что степень вырождения $5\frac{h\omega}{2}$ равна трём.

Задание читателю, если ему интересно:

А) найти степень вырождения $\frac{7h\omega}{2}$

Б) найти степень вырождения в общем случае для $\frac{(2n+1)h\omega}{2}$